

APPUNTI E RIFLESSIONI SUI FASCI DI RETTE

Dai fondamenti della geometria Euclidea si percepisce subito la nozione di fascio nell'ambito lineare. Infatti il punto, la retta, il piano sono "elementi primitivi" che posti in relazione individuano definizioni fondamentali con conseguenze molto significative nella ricerca di proprietà.

- Per un punto di un piano passano infinite rette
- Per un punto dello spazio passano infinite rette
- Per un punto dello spazio passano infiniti piani
- Per una retta dello spazio passano infiniti piani

La prima e l'ultima definizione rappresentano due esempi di *fasci*, uno di rette nel piano, l'altro di piani nello spazio; le altre due definizioni invece individuano il concetto di *stella* di rette e di piani nello spazio.

Dal punto di vista analitico il fascio di rette passanti per uno stesso punto P è determinato da due rette r e s qualsiasi che hanno in comune P; di conseguenza le corrispondenti equazioni

$$r: ax + by + c = 0 \quad e \quad s: a'x + b'y + c' = 0$$

costruiscono il fascio attraverso una semplice combinazione lineare, ossia in simboli

$$h \cdot r + m \cdot s = 0; \quad h \cdot (ax + by + c) + m \cdot (a'x + b'y + c') = 0, \text{ con } h, m \in \mathbf{R} \quad (*)$$

Ciò significa che ad ogni coppia di valori h, m (parametri) resta associata una retta ben precisa. In particolare, se $h = 0$ la retta del fascio è s, invece se $m = 0$ la retta risulta r.

Capita molto spesso di scrivere l'espressione (*) in modo più sintetico, cioè

$$r + k \cdot s = 0; \quad ax + by + c + k \cdot (a'x + b'y + c') = 0, \text{ con } k \in \mathbf{R} \text{ e } k = m/h; \quad (**)$$

in questo caso ad ogni valore di k (parametro essenziale) corrisponde una ben determinata retta, per cui tutte le rette del fascio (tranne s) sono rappresentate dalla (**); ma riflettendo su $k = m/h$, si può dire che s è rappresentata da $h = 0$, cioè per k tendente ad infinito.

E' importante rilevare che, dato un punto P, la rappresentazione del fascio di rette per P ha infinite modalità analitiche; basta considerare infatti due rette qualsiasi per P e costruire il fascio con l'equazione parametrica. Quindi le equazioni di un fascio (avente P come centro) sono infinite, mentre tutte le equazioni appartenenti allo stesso fascio, individuano univocamente P.

- Un fascio di rette si definisce proprio, quando tutte le rette hanno in comune il punto P, cioè sono incidenti in P, detto centro del fascio.
- Un fascio di rette si definisce improprio, quando tutte le rette hanno la stessa direzione, ossia tutte le rette sono parallele ad una retta data (in particolare ogni retta è parallela a se stessa)

Da quanto espresso in precedenza, si possono semplificare le due situazioni nel modo seguente:

Nel caso di fascio proprio, dato il punto $P(x_0, y_0)$, conviene costruire l'equazione parametrica attraverso la combinazione lineare delle semplici rette $y = y_0$ (orizzontale) e $x = x_0$ (verticale); in sintesi: $y - y_0 + k(x - x_0) = 0$, che può scriversi anche in forma esplicita:

$$y - y_0 = m(x - x_0), \text{ con } m = -k \text{ e } m \in \mathbf{R}.$$

In questo caso m rappresenta il coefficiente angolare di tutte le rette del fascio, tranne quella verticale.

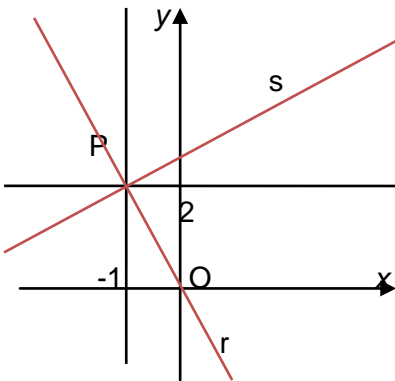
Nel caso di fascio improprio, assegnata una direzione definita da una retta r di equazione $ax + by + c = 0$, risulta agevole costruire il fascio, modificando solo il termine noto c con un parametro k , in quanto a e b non cambiano per il fatto che determinano il coefficiente angolare costante di tutte le rette parallele; in sintesi:

$$ax + by + k = 0, \text{ con } k \in \mathbf{R};$$

oppure se la retta base è espressa in forma esplicita $y = mx + q$, basta sostituire q con un altro parametro h , che in questo caso rappresenta tutte le "ordinate all'origine" del fascio; quindi si ha:

$$y = mx + h, \text{ con } h \in \mathbf{R}$$

ESEMPIO 1: Dato il punto $P(-1;2)$, individuare l'equazione del fascio di rette più semplice avente P come centro; successivamente scrivere una diversa equazione dello stesso fascio, costituito da due qualsiasi rette perpendicolari in P .



Formula: $y - y_0 = m(x - x_0)$;

Fascio di rette: $y - 2 = m(x + 1); mx - y + 2 + m = 0$ (1)

Considerando per semplicità la retta per P e O , cioè sostituendo nella (1) le coordinate di O , si ottiene $2 + m = 0$, $m = -2$; quindi r ha equazione $2x + y = 0$; la sua

perpendicolare in P ha equazione $y - 2 = 1/2(x + 1)$; da cui $x - 2y + 6 = 0$.

La nuova equazione del fascio è $r + k \cdot s = 0$, ossia $2x + y + k(x - 2y + 6) = 0$.

ESEMPIO 2: Date le rette r e s di equazione $2x - y + 2 = 0$ e $x + y + 1 = 0$, scrivere l'equazione del fascio dopo aver individuato il suo centro.

$$r \cap s: \begin{cases} 2x - y + 2 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}; \begin{cases} 2x - (-1 - x) + 2 = 0 \\ y = -1 - x \end{cases}; \begin{cases} 3x + 3 = 0 \\ y = -1 - x \end{cases}; \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}.$$

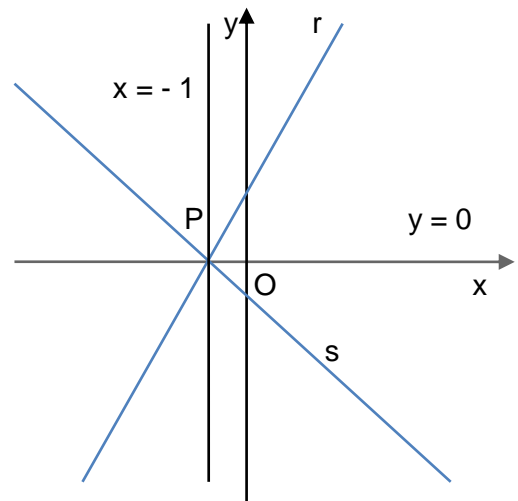
Il punto $P(-1; 0)$ rappresenta il centro del fascio,

per cui due qualunque equazioni del fascio sono:

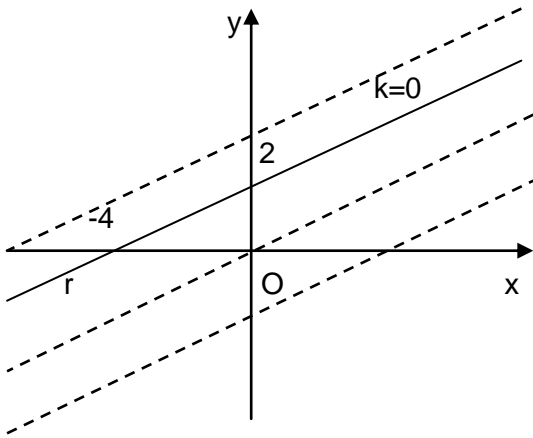
1^a) $y - 0 = m(x + 1)$, cioè $mx - y + m = 0$

2^a) $2x - y + 2 + k(x + y + 1) = 0$,

che si può scrivere $(k + 2)x + (k - 1)y + k + 2 = 0$



ESEMPIO 3 : Data la retta r di equazione $x - 2y + 4 = 0$, individuare il fascio di rette improprio, avente r come retta base (sostegno).



La retta r in forma esplicita ha equazione $y = x/2 + 2$; quindi tutte le rette del fascio improprio sono parallele a r . Affinché r sia retta base, bisogna costruire il fascio introducendo il parametro k nella somma con il termine noto 4, in modo tale che per $k = 0$ r sia univocamente determinata. In simboli: $x - 2y + 4 + k = 0$, per ogni valore di $k \neq 0$ si ottiene una retta parallela a r .

Se invece si vuole costruire lo stesso fascio di rette improprio con retta base diversa, basta rendere il termine noto parametro isolato (non più $4+k$, ma solo k); in questo caso cambia la retta base che diventa $x - 2y = 0$.

ESEMPIO 4 : Date le rette r e s , di equazione $2x + y - 3 = 0$ e $2x + y + 1 = 0$, dopo aver scritto il fascio costruito su r e s , individuare i casi particolari.

$r: y = -2x + 3$, $s: y = -2x - 1$

Il fascio improprio ha equazione $r + k \cdot s = 0$,

quindi $2x(k + 1) + y(k + 1) + k - 3 = 0$;

per $k = 0$ si ottiene r ,

per $k \rightarrow \infty$ si individua s (non inclusa nel fascio),

per $k = -1$, risulta $-4 = 0$, algebricamente impossibile,

ma geometricamente giustificabile con la retta

che passa per due punti impropri, ossia la retta impropria,

per $k \neq -1$ si determinano tutte le rette tranne quella impropria.

